BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2019

Épreuve : **MATHÉMATIQUES**	Série **: STI2D et STL spécialité SPCL**
Durée de l'épreuve : **4 heures**	Coefficient : **4**

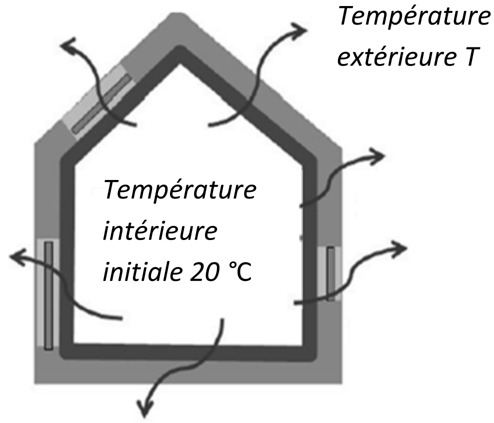
L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat doit s'assurer que le sujet distribué est complet.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies

EXERCICE n°1 (5 points) *:*



En plein hiver, en Europe, une maison est chauffée à 20 °C .
La température extérieure est notée T .
Dans tout l'exercice, on suppose que $T < 20$.

Lorsque le chauffage est coupé, la température intérieure diminue par perte de chaleur.

On modélise cette situation par une suite (u_n) dont le terme général u_n désigne la température intérieure de la maison n heures après la coupure du chauffage.

Pour une maison en maçonnerie traditionnelle et une température extérieure T constante, on admet que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}99\ u_n + \frac{T}{100} \qquad \text{et} \qquad u_0 = 20 \quad .$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

On suppose que la température extérieure T est égale à 0 °C. On a donc $T = 0$.

1. Calculer les termes u_1 et u_2 .
2. Montrer que, dans ce cas, la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n .
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Justifier.
5. **a)** Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n < 5$.

   b) En déduire le nombre de jours à partir duquel la température intérieure est descendue en dessous de 5 °C.

Partie B

On suppose que la température extérieure T est égale à -15 °C. On a donc $T = -15$.

1. Montrer que, dans ce cas, la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :
$u_{n+1} = 0{,}99\ u_n - 0{,}15$ et $u_0 = 20$.

2. **a)** Calculer les termes u_1 et u_2 .

b) Dans ce cas, la suite (u_n) est-elle géométrique ? Justifier la réponse.

3. On souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, le nombre d'heures à partir duquel la température intérieure devient strictement inférieure à 5 °C. On utilise pour cela l'algorithme incomplet ci-contre dans lequel U désigne un nombre réel et N un nombre entier naturel.

```
U ← 20
N ← 0
Tant que ……
    U ← …..
    N ← …..
Fin Tant que
```

a) Recopier et compléter l'algorithme.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre d'heures recherché.

EXERCICE n°2 (6 points)

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 4[$ par : $f(x) = 10x + \ln(4 - x) - \ln 4$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer $f(0)$.

2. **a)** Déterminer $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

b) En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote dont on précisera une équation.

3. **a)** On appelle f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 4[$.

Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ; 4[$, on a : $f'(x) = \frac{39-10x}{4-x}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ; 4[$.

c) Justifier que la fonction f atteint un maximum en 3,9.

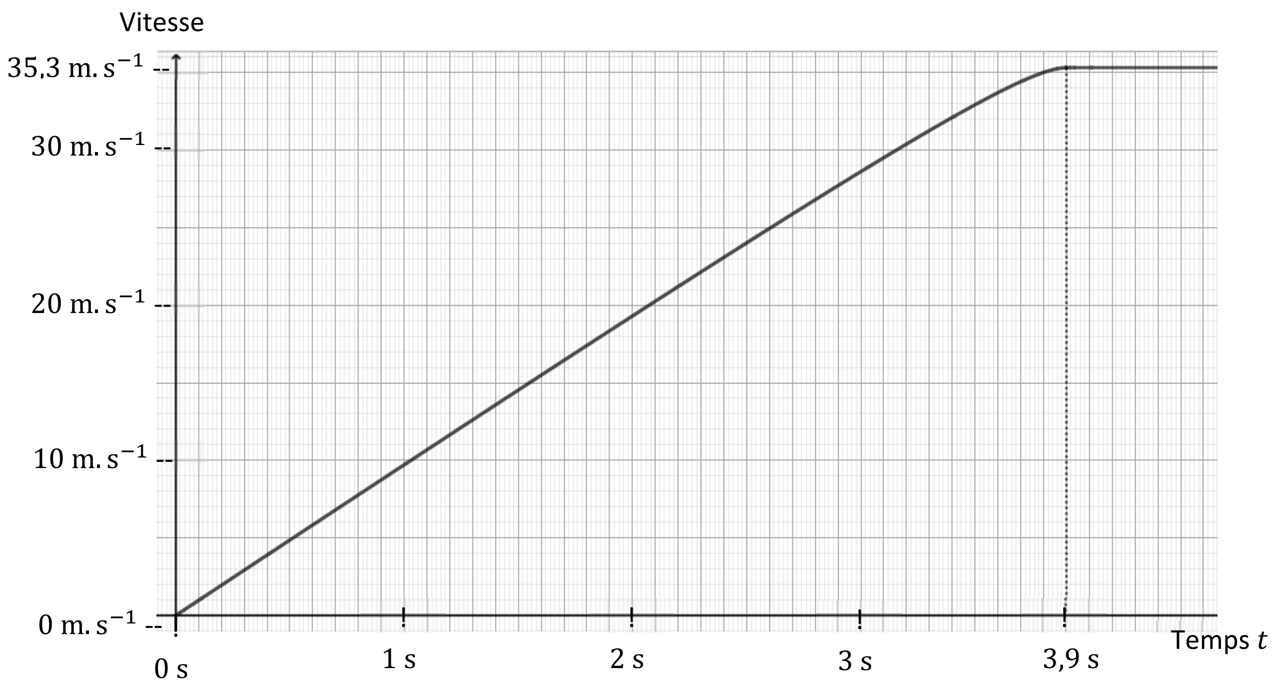
Donner une valeur approchée au dixième de ce maximum.

Partie B

Un constructeur de voitures électriques affirme que ses modèles peuvent atteindre la vitesse de 100 km.h^{-1} en moins de 3 secondes. Pour vérifier cette affirmation, des journalistes ont testé une de ces voitures en réalisant l'essai suivant :

- dans un premier temps, augmentation de la vitesse de 0 à $35{,}3\ \mathrm{m.s^{-1}}$ (soit environ $127\ \mathrm{km.h^{-1}}$) en 3,9 s ;
- dans un deuxième temps, stabilisation de la vitesse à $35{,}3\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

L'évolution de la vitesse en fonction du temps est représentée par le graphique ci-dessous :



Durant la phase d'accélération, la vitesse de la voiture est modélisée par la fonction f étudiée dans la partie A et définie par :

$$f(t) = 10t + \ln(4 - t) - \ln 4 \qquad \text{avec } t \in [0\,;3{,}9]$$

où t est exprimé en seconde et $f(t)$ est exprimée en $\mathrm{m.s^{-1}}$.

1. **a)** Calculer $f(3)$.

b) L'affirmation du constructeur est-elle vérifiée ?

2. La distance D, exprimée en mètre, parcourue durant la phase d'accélération est donnée par la formule : $D = \int_0^{3,9} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) On considère la fonction F définie sur $[0\,;3{,}9]$ par :

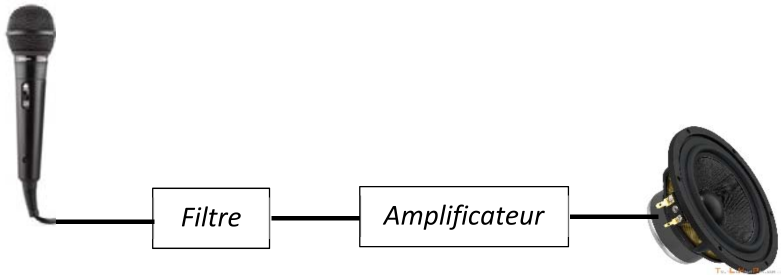
$$F(t) = 5t^2 - t + (t - 4)\,[\ln(4 - t) - \ln 4] .$$

Montrer que la fonction F est une primitive de f .

b) Calculer la distance D arrondie au dixième.

EXERCICE n°3 (5 points) :

Les résistances et les condensateurs sont des composants électroniques utilisés dans le domaine du son pour concevoir des filtres.



Placé en sortie d'un microphone, un filtre atténue plus ou moins les sons selon leur fréquence f, exprimée en Hertz (Hz).

Pour un filtre donné, l'atténuation d'un son se calcule à l'aide de deux nombres complexes z_R et z_C .

Dans tout l'exercice, on suppose que $z_R = 10$ et $z_C = -\frac{1000\sqrt{3}}{f}\,\mathrm{i}$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Effet du filtre sur un son grave

On choisit un son grave de fréquence $f = 100$.

1. Montrer que $z_C = -10\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

2. a) Déterminer la forme exponentielle de z_C .

b) On considère le nombre complexe $Z = z_R + z_C$. On a donc $Z = 10 - 10\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

Déterminer la forme exponentielle de Z .

c) On considère le nombre complexe z_G défini par : $z_G = \frac{z_C}{z_R + z_C} = \frac{z_C}{Z}$.

Montrer que $z_G = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

d) Le module du nombre complexe z_G est appelé gain du filtre.
Donner la valeur exacte du gain du filtre puis une valeur approchée au centième.

Partie B : Effet du filtre sur un son aigu

On choisit un son aigu de fréquence $f = 1000\sqrt{3}$.

1. Montrer que le nombre complexe z_G défini par $z_G = \frac{z_C}{z_R + z_C}$ est égal à $\frac{-\mathrm{i}}{10-\mathrm{i}}$.

2. Déterminer la forme algébrique de z_G .

3. Calculer la valeur exacte du gain du filtre $|z_G|$ et en donner une valeur approchée au centième.

EXERCICE n°4 (4 points) :

Cet exercice est composé de quatre affirmations indépendantes. Pour chacune d'entre elles, préciser si elle est juste ou fausse. Les réponses doivent être justifiées. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Une nouvelle gamme de téléphones portables est à l'étude.

1. La durée de fonctionnement, exprimée en jour, du processeur de ce téléphone portable est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle dont l'espérance est égale à 10 000 jours. La durée de garantie légale du téléphone portable est de 2 ans, soit 730 jours.

AFFIRMATION 1 : La probabilité que le processeur s'arrête de fonctionner durant la période de garantie est égale à $\mathrm{e}^{-0{,}073}$.

2. Pour anticiper la charge de travail du service après-vente, des tests ont été effectués en vue d'estimer le temps de réparation d'un téléphone sous garantie. Ce temps, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

AFFIRMATION 2 : La probabilité, arrondie au millième, que le temps de réparation T soit inférieur à 1 heure est 0,923 .

3. Une amélioration technique a été apportée. Désormais, la probabilité qu'un téléphone soit réparable en moins d'une heure est estimée à $p = 0{,}97$. Un atelier du service après-vente prévoit de réparer 200 téléphones portables. On s'intéresse aux échantillons constitués, aléatoirement, de 200 téléphones portables à réparer.

AFFIRMATION 3 : Pour de tels échantillons, en arrondissant les bornes au millième, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de téléphones réparables en moins d'une heure est $[0{,}946 \ ; \ 0{,}994]$.

4. Un fabricant de processeurs pour téléphone portable certifie que, dans son stock, la probabilité qu'un processeur neuf soit défectueux est $p = 0{,}0001$.
On désigne par Y la variable aléatoire correspondant au nombre de processeurs défectueux dans un lot de 200 prélevés au hasard. Le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. Ainsi, la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}0001$.

AFFIRMATION 4 : La probabilité, arrondie au millième, qu'il n'y ait aucun processeur défectueux dans un lot de 200 processeurs est égale à 0,980 .